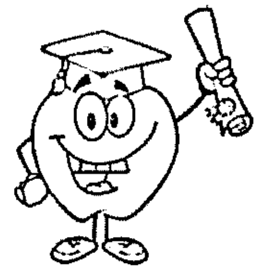
الرياضيات



10

التحليل (5)

السنة: الثالثة

الفصل: الثاني

الدكتور: نايف طلي

10

P L U S				P L U S
	القسم: رياضيات	**السنة:** الثالثة	**المحاضرة :** العاشرة	
	المادة : تحليل5	**الدكتور:** نايف طلي	**التاريخ:** 1/ 4 /2019	

انتهينا في المحاضرة السابقة من الفصل الأول بمقررنا ولنبدأ ببعض المراجعات المفيدة ببحثنا القادم

مقدمة عن تكامل ريمان:

بعض المجاميع الشهيرة:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$\sum_{i=1}^{n} c = c + c + c + \cdots + c = nc$$

$$\sum_{i=1}^{n} c a_i = c \sum_{n=1}^{n} a_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} (\varphi a_i + \beta b_i) = \varphi \sum_{n=1}^{n} a_i + \beta \sum_{n=1}^{n} b_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

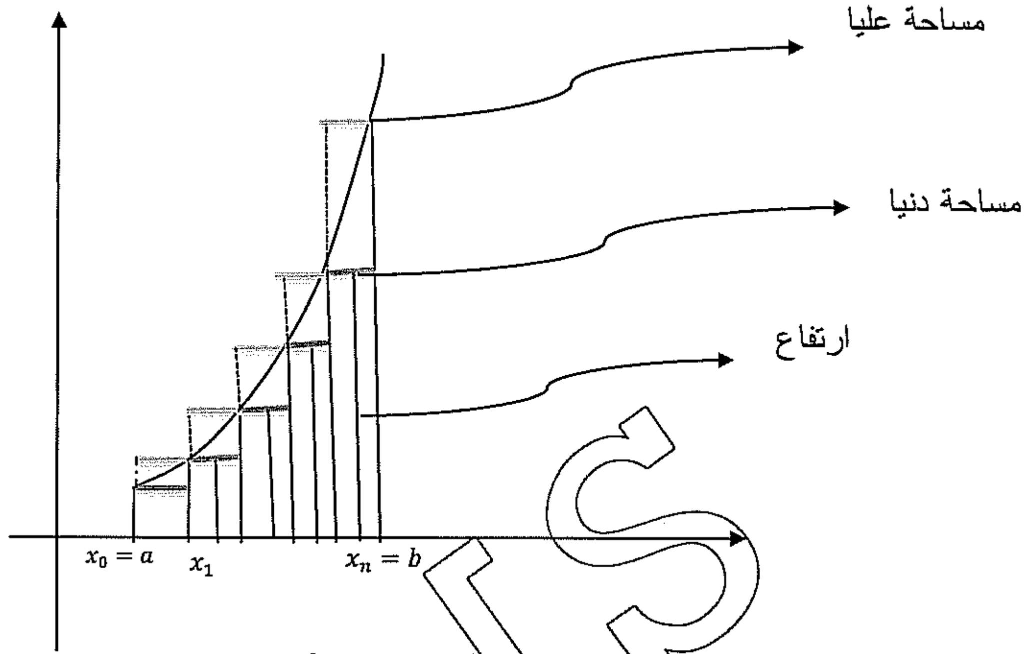
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

تعريف مجموع ريمان:

إذا كانت الدالة f معرفة ومحدودة على المجال $[a\,,b]$ وكانت لدينا التجزئة $p \in P[a\,,b]$ بحيث:

$$p = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b\}$$



لنأخذ مجوع المساحة الدنيا:

$$\underbrace{L(f\,,p)}_{\text{المساحة الدنيا}} = f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \cdots + f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})$$

$$\underbrace{U(f\,,p)}_{\text{المساحة العليا}} = f(x_1)(x_1 - x_0) + f(x_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(x_n)(x_n - x_{n-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1})$$

نرمز $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ للسهولة .

$$S(f,p) = f(t_1)(x_1 - x_0) + f(t_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(t_n)(x_n - x_{n-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{f(t_k)}_{\text{ارتفاع}} (x_k - x_{k-1})$$

حيث: $x_{k-1} \le t_k \le x_k$

للتبسيط:

$$S(f,p)=\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k$$

يدعى المجموع $S(f,p)$ **بمجموع ريمان**

والشرط اللازم والكافي لوجود تكامل ريمان: (أي ان التابع كمول "قابل للمكاملة")

$$\lim_{\Delta x\to 0}(U-l)=0$$

حيث: $\Delta x=\underset{1\le k<n}{max}(\Delta x_k)$

واذا كانت التجزئة المنتظمة أي: $\Delta x=\frac{b-a}{n}$

وعندها تؤول النهاية $\lim_{\Delta x\to 0}(U-l)=0$ إلى الشكل: $\lim_{n\to\infty}(U-l)=0$

نقول عن f إنه كمول إذا وجدت النهاية $A\in\mathbb{R}$ بحيث

$$\lim_{\Delta x\to 0} S(f,p)=A=\int_a^b f(x)\cdot dx$$

حيث $\Delta x=\underset{1\le k<n}{max}(x_k-x_{k-1})$

تعريف تكامل ريمان:

(وهو التعريف الذي سنعتمد عليه على ايجاد التكامل)

نقول عن f إنه كمول(قابل للمكاملة) على $[a,b]$ إذا وجدت النهاية $A\in\mathbb{R}$ بحيث

$$\lim_{\Delta x\to 0} S(f,p)=A$$

حيث $\Delta x=\underset{1\le k<n}{max}(x_k-x_{k-1})$

وكانت هذه النهاية مستقلة عن التجزئة p وعن اختيار t_k ويرمز لهذه النهاية: $A=\int_a^b f(x)\cdot dx$.

واذا كانت التجزئة منتظمة$\Delta x=\frac{b-a}{n}$ تأول النهاية الى الشكل:

$$\lim_{n\to\infty} S(f,p)=A$$

تعاريف أخر لتكامل ريمان:

✰نقول عن f إنه كمول حسب ريمان على $[a,b]$ إذا وجدت النهاية وتحقق الشرط:

$$\forall\,\varepsilon>0\,,\exists\,P_\varepsilon\;;\;P_\varepsilon\subset P\Rightarrow\;|S(f,P)-A|<\varepsilon$$

بحيث P تجزئة أدق من P_ε

★نقول عن f إنه كمول حسب ريمان على $[a,b]$ إذا وجدت النهاية وتحقق الشرط:

$$\forall\, \varepsilon > 0\,, \exists\, \delta_\varepsilon > 0\;;\; \Delta x = \|p\| < \delta_\varepsilon : |S(f,P) - A| < \varepsilon$$

حيث: $\Delta x = \max\limits_{1\le k\le n}\{x_k - x_{k-1}\}$.

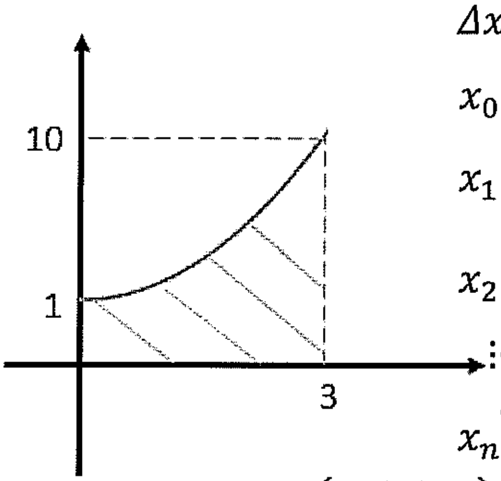
احسب التكامل التالي حسب تعريف ريمان:

$$\int_0^3 (x^2+1)dx$$

لنأخذ التجزئة:

$$p = \{x_0 = 0 < x_1 < \cdots < x_n = 3\}$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{n}$$



$$x_0 = 0$$

$$x_1 = 0 + \frac{3}{n}$$

$$x_2 = 0 + 2\left(\frac{3}{n}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_n = 0 + n\left(\frac{3}{n}\right) = 3$$

$$S(f,p) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x_k = [f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)]\Delta x$$

$$= [x_1^2 + 1 + x_2^2 + 1 + \cdots + x_n^2 + 1]\Delta x$$

$$= \left[n + \left(\frac{3}{n}\right)^2 + 2^2\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + n^2\left(\frac{3}{n}\right)^2\right]\frac{3}{n}$$

$$= 3 + \frac{3}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2 [1^2 + 2^2 + \cdots + n^2]$$

$$= 3 + \frac{27}{n^3}\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$= 3 + \frac{9(n+1)(2n+1)}{2n^2} = 3 + \frac{9(n^2+3n+1)}{2n^2}$$

$$A = \lim_{n\to\infty} S(f,p) = 3 + 9 = 12$$

ملاحظة: عندما $n \to \infty$ وصلنا للقيمة الدقيقة للتكامل اما عندما تسعى الـــ n لقيمة معينة ولتكن $n \to 5$ نلاحظ انها تكون قريبة من 12.

احسب التكامل حسب تعريف تكامل ريمان(وظيفة)

$$I = \int_1^3 (x+1)\,dx$$

نختار تجزئة منتظمة: $x_k = 1 + k.\frac{2}{n}$

$$P = \left\{x_0 = 1 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 1 + n.\frac{2}{n} = 3\right\}$$

$$A = \int_1^3 f dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{n}\left(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{n}\left(\left(1 + \frac{2}{n}\right) + 1 + \left(1 + 2\frac{2}{n}\right) + 1 + \cdots + \left(1 + n\frac{2}{n}\right) + 1\right)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{n}\left(n + n + \frac{2}{n}(1 + 2 + \cdots + n)\right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{n}\left(2n + \frac{2}{n}\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{n}\left(2n + (n+1)\right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(4n + \frac{2(n+1)}{n}\right) = 6$$

وظيفة: احسب التكاملات التالية حسب تعريف ريمان: (يترك للقارئ)

$$1)\quad \int_0^3 x^2 dx = 9\ , \qquad 2)\int_0^2 (x+1)dx = 4$$

شروط وجود تكامل ريمان:

1) f معرفة على $[a, b]$

2) f محدود على $[a, b]$

نظرية1: اذا كان f مستمر فإن f كمول
نظرية2: الشرط اللازم والكافي ليكون f كمول هو $\lim\limits_{\Delta x \to 0}(U - L) = 0$
نظرية3: اذا كان f مستمر على $[a,b]$ باستثناء عدد منتهي من النقاط فإن f كمول

خواص تكامل ريمان:

$$1)\ \int_a^b dx = b - a$$

$$2)\ \int_a^b \alpha\, dx = \alpha(b - a)$$

$$3)\ \int_a^b (\alpha f) dx = \alpha \int_a^b f dx \quad ؛\alpha \in \mathbb{R}$$

$$4)\ \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$5)\ \int_{-a}^a f(x) dx = 0 \Leftrightarrow f \text{ فردي}$$

$$6)\ \int_{-a}^a f(x) dx = 2\int_0^a f(x) dx \Leftrightarrow f \text{ زوجي}$$

$$7)\ \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad ; a < c < b$$

تجزيئ المجال لا يؤثر على التكامل

$$8)\ \left|\int_a^b f(x) dx\right| \le \int_a^b |f(x)| dx$$

$$9)\ \int_a^b (f \pm g) dx = \int_a^b f dx \pm \int_a^b g dx$$

$$10)\ \int_a^b f dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

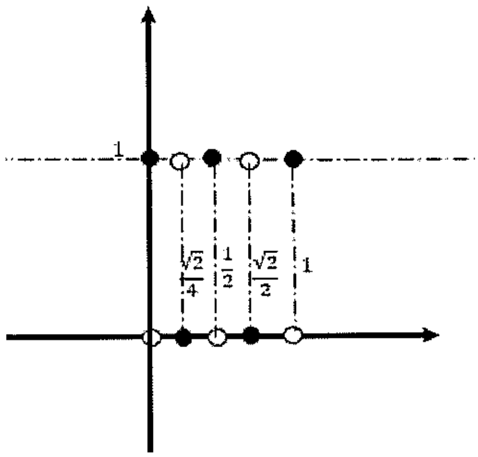
حيث F دالة أصلية لـــ f أي تحقق $F' = f$.

تمرين:

برهن أن الدالة f المعرفة على $[a,b]$ كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}1 & ;x\in\mathbb{Q}\\ -1 & ;x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

غير قابلة للمكاملة حسب ريمان على $[0,1]$



ألية الحل: نختار تجزئة ونبين أن A غير موجود.

بمعنى اذا وجد A وحيد $\Leftarrow$ التكامل موجود.

أما اذا كان له عدة قيم فهذا يعني أن التكامل غير موجود.

الحل: نلاحظ أن $f(x)$ معرفة ومحدودة أي:

$$|f(x)|\le 1\,;\forall x\in[0,1]$$

لتكون f كمولة يجب أن تحقق الشرط:

$$A=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k=\int_0^1 f(x)dx$$

$$x_{k-1}\le t_k\le x_k\ ,\qquad \Delta x_k=x_k-x_{k-1}\ ,\qquad \Delta x=\max\Delta x_k$$

لنأخذ التجزئة:

$$p=\{x_0=0\underbrace{\le}_{t_1}x_1\underbrace{\le}_{t_2}x_2<\ \dots\ <x_{n-1}\underbrace{\le}_{t_n}x_n=1\}$$

نميز حالتين لـــ t_k:

$$1)\ t_k\in\mathbb{Q}\Rightarrow f(t_k)=1$$

$$A=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{n} x_k-x_{k-1}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}[x_1-x_0+x_2-x_1+\cdots+x_n-x_{n-1}]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}[x_n-x_0]=\lim_{\Delta x\to 0}[1-0]=1$$

$$2)\ t_k\notin\mathbb{Q}\Rightarrow f(t_k)=-1$$

$$A=(-1)\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{n}\Delta x=-1\qquad ;\Delta x=\max\Delta x_k$$

بما أن النهايتين غير متساوتين $\Leftarrow$ الدالة f غير كمولة

ملاحظة: اذا كان التكامل موجود نقول عندئذ من أجل أي تجزئة.

تذكرة: جدولا ببعض التكاملات الشهيرة:

$f(x)$	$F(x)$
$m \quad ; m \in \mathbb{R}$	$mx + c$
$x^a \quad ; a \in \mathbb{R}/\{-1\}$	$\frac{x^{a+1}}{a+1} + c$
$x^{-1} = \frac{1}{x}$	$ln\|x\| + c$
$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$ln\|f(x)\| + c$
$f'(x).f^n(x) \quad : n \in \mathbb{R}/\{-1\}$	$\frac{f^{n+1}}{n+1} + c$
e^x	$e^x + c$
$e^{g(x)}.g'(x)$	$e^{g(x)} + c$
$e^{ax} \quad ; a \neq 0$	$\frac{1}{a}e^{ax} + c$
a^x	$\frac{1}{ln\, a}a^x + c$
$sin\, x$	$-cos\, x + c$
$sin(ax + b)$	$-\frac{1}{a}cos(ax + b) + c$
$cos\, x$	$sin\, x + c$
$cos(ax + b)$	$\frac{1}{a}sin(ax + b) + c$
$\frac{1}{cos^2 x} = sec^2 x$	$tan\, x + c$
$\frac{1}{cos^{\,2}(ax)} = sec^2(ax)$	$\frac{1}{a}tan(ax) + c\, ; a \neq 0$

$\frac{1}{\sin^2 x} = \csc^2 x$	$-\cot an\, x + c$
$\frac{1}{\sin^2(ax)} = \csc^2(ax)$	$-\frac{1}{a}\cot an(ax) + c$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + c$
$\cot an\, x$	$\ln\lvert\sin x\rvert + c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + c$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + c$

انتهت المحاضرة